

数学 (その1)

第1問

直線 $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \cdots \textcircled{1}$ と放物線 $y = x^2 - 2x - 2 \cdots \textcircled{2}$ がある。

(i) $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ の交点は 2 つあり, それらの座標をすべて求めると $\boxed{\quad (1) \quad}$ と $\boxed{\quad (2) \quad}$ である。

(ii) (i) で求めた交点の x 座標を α, β とし, $\alpha > \beta$ とする。ある実数 z に対して, z 以上の整数で最小のものを z_m, z 以下の整数で最大のものを z_M と表すことにする。このとき $\alpha_m = \boxed{\quad (3) \quad}, \beta_M = \boxed{\quad (4) \quad}$ である。

(iii) $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ で囲まれてできる図形について, その周上 ($\textcircled{1}, \textcircled{2}$ の $\beta \leq x \leq \alpha$ の部分) に $\boxed{\quad (5) \quad}$ 個の格子点 (x 座標, y 座標ともに整数である点) をもち, 周以外の部分に $\boxed{\quad (6) \quad}$ 個の格子点をもつ。

第2問

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d は定数) が, ある定数 m に対して等式

$$f(x) + xf'(x) - \int_0^x f(t) dt = -4x^4 + 10^m x$$

が成り立つとき, $a = \boxed{\quad (7) \quad}, b = \boxed{\quad (8) \quad}, c = \boxed{\quad (9) \quad}, d = \boxed{\quad (10) \quad}$ である。また $\log_{10} 2 = K, \log_{10} 3 = L$ とおくと m を K と L を用いて表すと, $m = \boxed{\quad (11) \quad}$ である。

数学 (その2)

第3問

θ を実数として、座標平面上に 3 点 $O(0,0)$, $A(\cos \theta, \sin \theta)$, $B(\cos 2\theta, -\sin 2\theta)$ をとる。

- (i) 2 点 A, B はともに中心が で半径が の円の周上にある。
- (ii) $0 < \theta < 2\pi$ とする。2 点 A, B が一致するような θ の値をすべて求めると小さい方から順に であり、そのときの点 A および B の座標は θ の値の小さい順にすべて答えると である。
- (iii) $0 < \theta < 2\pi$ とする。相異なる 2 点 A, B に対して直線 AB が点 O を通るような θ の値をすべて求めると小さい方から順に であり、そのときの点 B の座標は θ の値の小さい順にすべて答えると である。
- (iv) $0 < \theta < \pi$ とする。三角形 OAB が正三角形になるような θ の値をすべて求めると小さい方から順に であり、そのときの三角形 OAB の面積は である。

第4問

次の 8 つの整数 (*) の中から 2 つを選んでできる分数を考える。

$$17, 25, 40, 59, 125, 200, 296, 473 \quad (*)$$

これらの分数の中で、値が $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ に最も近いものを A , 二番目に近いものを B , 三番目に近いものを C とする。 A, B, C の分母と分子を、以下の から に (*) の整数を記入して答えよ。ただし $\sqrt{3} = 1.732$ とし、(*) の整数のうち同じ数を何度使ってもよい。

$$A = \frac{\text{(20)}}{\text{(21)}}, \quad B = \frac{\text{(22)}}{\text{(23)}}, \quad C = \frac{\text{(24)}}{\text{(25)}}$$

第5問

a, b, c, d が有理数のとき、 $a + \sqrt{3}b = c + \sqrt{3}d$ ならば $a = c$ かつ $b = d$ であることを、 $\sqrt{3}$ が無理数であることを用いて証明せよ：