数学　（その１）

第１問

直線 $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2} \cdots$ ① と放物線 $y = x^2 - 2x - 2 \cdots$ ② がある。

(i) ① と ② の交点は 2 つあり, それらの座標をすべて求めると $\boxed{\quad(1)\quad}$ と $\boxed{\quad(2)\quad}$ である。

(ii) (i) で求めた交点の x 座標を α, β とし, $\alpha > \beta$ とする。ある実数 z に対して, z 以上の整数で最小のものを z_m, z 以下の整数で最大のものを z_M と表すことにする。このとき $\alpha_m = \boxed{\quad(3)\quad}$, $\beta_M = \boxed{\quad(4)\quad}$ である。

(iii) ① と ② で囲まれてできる図形について, その周上 (①, ② の $\beta \leqq x \leqq \alpha$ の部分) に $\boxed{\quad(5)\quad}$ 個の格子点 (x 座標, y 座標ともに整数である点) をもち, 周以外の部分に $\boxed{\quad(6)\quad}$ 個の格子点をもつ。

第２問

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d は定数) が, ある定数 m に対して等式

$$f(x) + xf'(x) - \int_0^x f(t)\,dt = -4x^4 + 10^m x$$

が成り立つとき, $a = \boxed{\quad(7)\quad}$, $b = \boxed{\quad(8)\quad}$, $c = \boxed{\quad(9)\quad}$, $d = \boxed{\quad(10)\quad}$ である。また $\log_{10} 2 = K, \log_{10} 3 = L$ とおくとき m を K と L を用いて表すと, $m = \boxed{\quad(11)\quad}$ である。

数学　（その２）

第３問

θ を実数として，座標平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(\cos\theta, \sin\theta)$, $\mathrm{B}(\cos 2\theta, -\sin 2\theta)$ をとる。

(i) 2 点 A, B はともに中心が $\boxed{(12)}$ で半径が $\boxed{(13)}$ の円の周上にある。

(ii) $0 < \theta < 2\pi$ とする。2 点 A, B が一致するような θ の値をすべて求めると小さい方から順に $\boxed{(14)}$ であり，そのときの点 A および B の座標は θ の値の小さい順にすべて答えると $\boxed{(15)}$ である。

(iii) $0 < \theta < 2\pi$ とする。相異なる 2 点 A, B に対して直線 AB が点 O を通るような θ の値をすべて求めると小さい方から順に $\boxed{(16)}$ であり，そのときの点 B の座標は θ の値の小さい順にすべて答えると $\boxed{(17)}$ である。

(iv) $0 < \theta < \pi$ とする。三角形 OAB が正三角形になるような θ の値をすべて求めると小さい方から順に $\boxed{(18)}$ であり，そのときの三角形 OAB の面積は $\boxed{(19)}$ である。

第４問

次の 8 つの整数 $(*)$ の中から 2 つを選んでできる分数を考える。

$$17,\quad 25,\quad 40,\quad 59,\quad 125,\quad 200,\quad 296,\quad 473 \qquad (*)$$

これらの分数の中で，値が $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ に最も近いものを A，二番目に近いものを B，三番目に近いものを C とする。A, B, C の分母と分子を，以下の $\boxed{(20)}$ から $\boxed{(25)}$ に $(*)$ の整数を記入して答えよ。ただし $\sqrt{3} = 1.732$ とし，$(*)$ の整数のうち同じ数を何度使ってもよい。

$$A = \frac{\boxed{(20)}}{\boxed{(21)}}, \quad B = \frac{\boxed{(22)}}{\boxed{(23)}}, \quad C = \frac{\boxed{(24)}}{\boxed{(25)}}$$

第５問

a, b, c, d が有理数のとき，$a + \sqrt{3}b = c + \sqrt{3}d$ ならば $a = c$ かつ $b = d$ であることを，$\sqrt{3}$ が無理数であることを用いて証明せよ：$\boxed{(26)}$